الجامعة [illegible]

12 / 12 / 2017

تمرين 1:

اثبت أن دالة ديرخليه هي دالة المكاملة حسب مفهوم ليبيغ

الحل:

إن $\varphi(x)$ مقيسة ومحدودة فهي كاملة حسب ليبيغ

ومنه إذا فرضنا: $Q_2=[0,1]\setminus Q$ ، $Q_1=[0,1]\cap Q$

وهاتين المجموعتين منفصلتين ومقيستين

عندئذ:

$$Q_1\cup Q_2=[0,1]=E$$

$$Q_1\cap Q_2=\phi$$

بإذا تكامل ليبيغ:

$$\int_{[0,1]}\varphi\,d\lambda=\int_0^1\varphi\,d\lambda=\int_{Q_1}\varphi\,d\lambda+\int_{Q_2}\varphi\,d\lambda$$

$$=\overset{(1)(0)}{0}+0\cdot\lambda(Q_2)=0$$

$\lambda(Q_1)=0$ ، وهي قابلة للمكاملة حسب ليبيغ وتكامل ليبيغ لها معدوم

طريقة ثانية: $\varphi\overset{a.e}{=}0$ على $[0,1]$

$$\Rightarrow\int_{[0,1]}\varphi\,d\lambda=0$$

لأن: $\varphi\overset{a.e}{=}0$ على $[0,1]$ لأن

$$E_0=\{x\in E:\varphi(x)\neq 0\}=Q_1\Rightarrow\lambda(Q_1)=0$$

تمرين:

لتكن φ_n متتالية من الدوال المقيسة والمعرفة تقريبا في كل مكان على المجموعة E وليكن:

$\varphi_n \xrightarrow{\text{ت}} f$ على E.

$\varphi_n \xrightarrow{\text{ت}} g$ على E.

أثبت: $g \overset{\circ}{=} f$ على E.

الحل:

$$\forall \sigma > 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \lambda\left[E\left(|\varphi_n - f| \geq \frac{\sigma}{2}\right)\right] = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda\left[E\left(|\varphi_n - g| \geq \frac{\sigma}{2}\right)\right] = 0.$$

من خاصية الشمول لدينا:

$$E(|f - g| \geq \sigma) \subseteq E\left(|\varphi_n - f| \geq \frac{\sigma}{2}\right) \cup E\left(|\varphi_n - g| \geq \frac{\sigma}{2}\right)$$

ومنه لدينا:

$$\Rightarrow \lambda[E|f - g| \geq \sigma] \leq \lambda\left(E|\varphi_n - f| \geq \frac{\sigma}{2}\right) + \lambda\left[E|\varphi_n - g| \geq \frac{\sigma}{2}\right]$$

وبأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ نجد:

$\forall \sigma > 0$;

$$\lim_{n \to \infty} \lambda[E(|f - g|) \geq \sigma] = 0$$

ومن جهة أخرى نلاحظ أن:

$$E(f \neq g) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(|f - g| \geq \frac{1}{n}\right)$$

وهذا يقتضي:

Alamal

على E : $f \overset{ae}{=} g \Leftarrow \lambda_E(f \neq g) = 0$

وهو المطلوب

تمرين:

لتكن الدالة f معرفة على المجال $[0,1]$ من $\mathbb{R}$ معرفة بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in C \\ 2 & ; x \in C^c \end{cases}$$

(C مجموعة كانتور، C^c متممة كانتور)

الحل:

$$C \cup C^c = [0,1] , \quad C \cap C^c = \phi$$

إن هذه الدالة معرفة ومعرفة على C^c مجموعة كانتور، مقيسة حسب ليبيغ [illegible] ليبيغ لا [illegible] الصفر

لأن الدالة الثابتة مقيسة على أي مجموعة مقيسة

ونكتب:

$$f(x) = 1\, I_C(x) + 2\, I_{C^c}(x)$$

الخلاصة: هذه الدالة مقيسة وهي محدودة فهي قابلة للمكاملة حسب مفهوم ليبيغ

$$(L)\int_E f\,d\lambda = (L)\int_C f\,d\lambda + (L)\int_{C^c} f\,d\lambda$$

$$= 1.\lambda(C) + 2.\lambda(C^c) = 0 + 2(1) = 2$$

نتيجة:

كل دالة محدودة غير قابلة للمكاملة حسب مفهوم ريمان، بالتالي قابلة للمكاملة حسب مفهوم ليبيغ.

تمرين : سؤال الدورة

لتكن الدالة f المعرفة على $[0,1]$ بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & ; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

المطلوب : 1- هل هذه الدالة مستمرة تقريباً في كل مكان .

2- هل قابلة للمكاملة حسب مفهوم ريمان .

3- هل قابلة للمكاملة حسب مفهوم لوبيغ .

4- إن كانت تكامل لوبيغ موجود جد قيمة هذا التكامل .

نلاحظ أن الدالة المعرفة مستمرة فقط فقط في النقطة $x=1$

وبالتالي مجموعة نقاط الانقطاع لا هي المجموعة $E_0=[0,1[$ وهذه

المجموعة مقيسة لأن $\lambda(E_0)=1 \neq 0$

فإن غير مستمرة تقريباً في كل مكان

(توضيح) إذا x_0 عددي ; $\forall x_0 \in [0,1[$

نعتبر متتالية من الأعداد غير العادية بحيث أن :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

$$f(x_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1 \neq x_0^3 = f(x_0)$$

• x_0 عدد غير عادي ; $\forall x_0 \in [0,1[$

نعتبر متتالية من الأعداد العادية بحيث أن :

$$f(x'_n) = x'^3_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x'_n) = x_0^3 \neq 1 = f(x_0)$$

[illegible]

الحل: نلاحظ أن:

$f(x) = x^3 \cdot \chi(x) + (1 - \chi(x))$; $\forall x \in [0,1[$

إن هذه الدالة مستمرة على المجال

ومن حيث أن الدالة المعرفة تمثل دالة معرفة حسب ... المجال ... ومنه الدالة محدودة ... حسب مفهوم ليبيغ

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$

ومنه يعني أن الدالة المعرفة مستمرة عند النقطة $x = 1$

نلاحظ أن الدالة تساوي:

$g(x) = x^3$; $\forall x \in [0,1]$

هذه الدالة مستمرة على $[0,1]$ أي مقيسة

$f \overset{a.e}{=} g$ على E

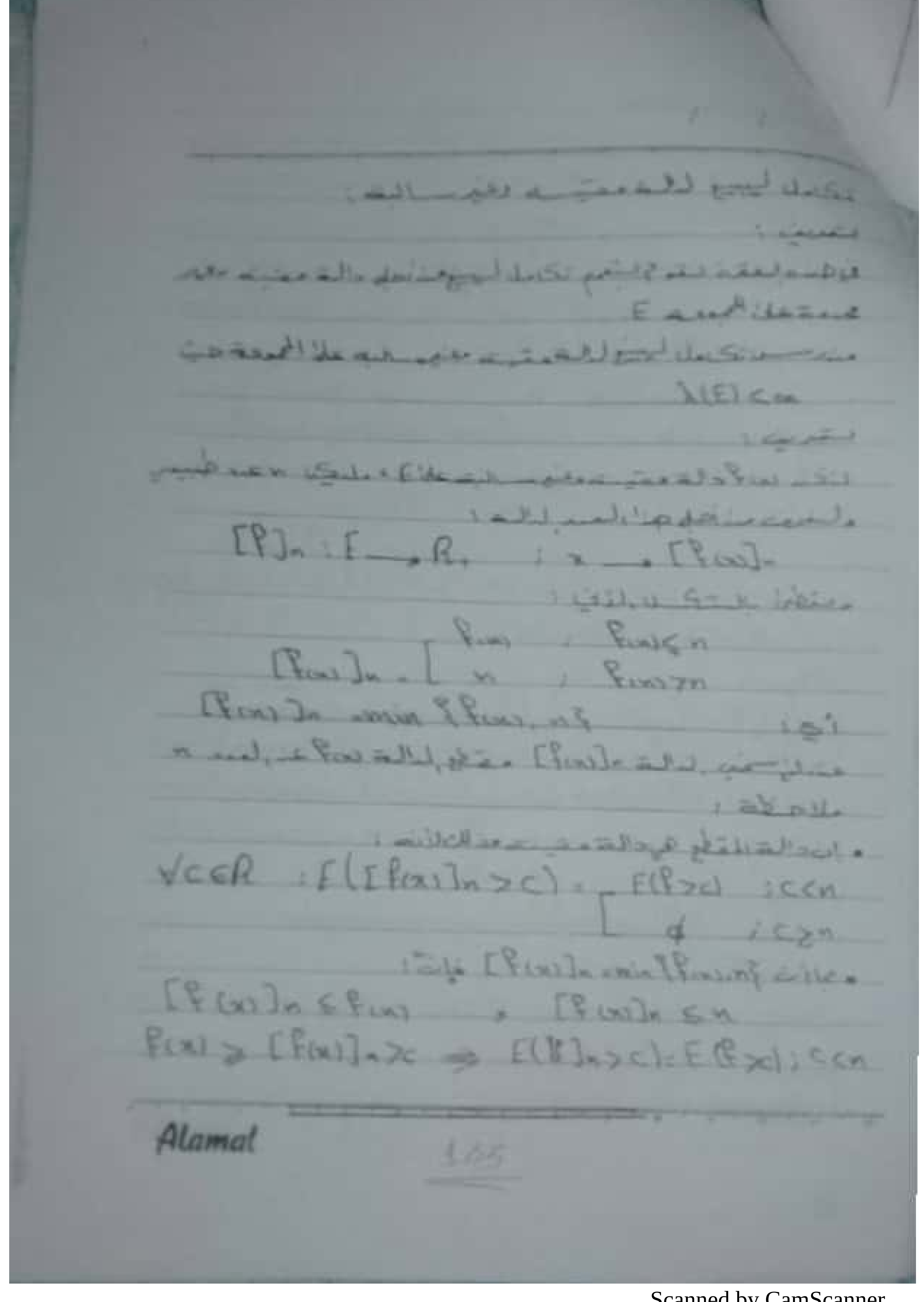
بما أن g مستمرة فهي قابلة للتكامل حسب ريمان وبالتالي قابلة للتكامل حسب ليبيغ متكاملة ريمان يساوي التكامل ليبيغ

$$\int_E g \, d\lambda = (R)\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{1}{4}$$

ومنه نجد أن:

$$(L)\int_E f(x)\, d\lambda = (L)\int_E g \, d\lambda = \frac{1}{4}$$

وهو المطلوب



تكامل لوبيغ للدوال المقيسة الغير سالبة :

تعميم :

في هذه الفقرة نقوم بتعميم تكامل لوبيغ على دالة مقيسة معرفة على المجموعة E

من [illegible] تكامل لوبيغ للدالة [illegible] على المجموعة حيث $\lambda(E) < \infty$

تعريف :

لتكن f دالة مقيسة [illegible] E ، ولتكن n عدد طبيعي ، [illegible] الدالة :

$$[f]_n : E \to \mathbb{R}_+ \; ; \; x \mapsto [f(x)]_n$$

معرفة كما يلي :

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \leq n \\ n & ; f(x) > n \end{cases}$$

أي : $[f(x)]_n = \min\{f(x), n\}$

[illegible] الدالة $[f(x)]_n$ مقطوعة الدالة $f(x)$ ، [illegible] n

ملاحظة :

• إن الدالة المقطوعة [illegible] :

$$\forall c \in \mathbb{R} \; : E([f(x)]_n > c) = \begin{cases} E(f > c) & ; c < n \\ \emptyset & ; c \geq n \end{cases}$$

• لدينا $[f(x)]_n = \min\{f(x), n\}$ فإنه :

$$[f(x)]_n \leq f(x) \quad , \quad [f(x)]_n \leq n$$

$$f(x) \geq [f(x)]_n > c \Rightarrow E([f]_n > c) = E(f > c) \; ; c < n$$